FOGLIO DI ESERCIZI 10

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1. Per ogni coppia di spazi topologici X e Y, indichiamo con $[X,Y]$ l'insieme delle classi di omotopia di mappe continue $f: X \to Y$.

(1) Dimostrare che se Y è contraibile allora, per ogni spazio X, l'insieme $[X,Y]$ consiste di un solo punto.

(2) Dimostrare che se X è contraibile e Y è connesso per archi allora l'insieme $[X,Y]$ consiste di un solo punto.

Esercizio 2. Usare l'esercizio precedente per dedurre che ogni funzione continua e *non suriettiva* $f: X \to S^1$ è omotopa ad una funzione costante.

Esercizio 3. Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottospazio e supponiamo che esista una retrazione (non necessariamente per deformazione) $r: X \to A$. Dimostrare che se X è di Hausdorff allora A è necessariamente un sottoinsieme chiuso di X.

Esercizio 4. Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottospazio, $a \in A$ un punto arbitrario e $i: A \hookrightarrow X$ l'inclusione. Supponiamo poi che esista una retrazione (non necessariamente per deformazione) $r: X \to A$. Dimostrare che $i_*: \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ è un monomorfismo e che $r_*: \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ è un epimorfismo.

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico semplicemente connesso, e siano x_0, x_1 due punti distinti di X. Dimostrare che due qualsiasi cammini continui in X con punto iniziale x_0 e punto finale x_1 sono omotopi.